数理解析研究所講究録
第 1670 巻 2009 年 117-125

同変実射影空間上の同変実ベクトル束について

岡山大学大学院自然科学研究科　祁 艶 (QI, Yan)
Graduate School of Natural Science and Technology
Okayama University

1. 序節

この論文では G は有限群とする. (有限次元の) 実 G-加群 V に対して, $S(V)$ は V の G-不変な内積に関する単位球面を表し, $P(V)$ は同変実射影空間 $S(V)/\{\pm 1\}$ を表す. G-空間 M と実 G-加群 V に対して $\varepsilon_M(V)$ は底空間を M, 全空間を $M\times V$ とする直積束と呼ばれる同変ベクトル束を表す. $\mathbb{R}^n$ は自明な G-作用を持つ n-次元ユークリッド空間 (実 G-加群) を表す. M が (可微分) 多様体であるとき $T(M)$ は M の同変接ベクトル束を表す. また $M=P(V)$ のとき, γ_M は M 上の同変標準直線束を表し, $\gamma_M^{\perp}$ は γ_M の $\varepsilon_M(V)$ における (V の G-不変な内積に関する) 直交補（ベクトル）束を表し, 従って γ_M の全空間 $E(\gamma_M)$ は

$$\{(\{\pm x\}, v) \mid x\in S(V),\, v\in\mathbb{R}\cdot x(\subset V)\}$$

であり, $\gamma_M\oplus\gamma_M^{\perp}=\varepsilon_M(V)$ である.

以下の定理が成り立つ.

Theorem 1. G-加群 V, $M=P(V)$, $\gamma=\gamma_M$ に対して, 以下の (1)–(5) が成り立つ.

(1) $\mathrm{Hom}(\gamma,\gamma)=\varepsilon_M(\mathbb{R})$.
(2) $\mathrm{Hom}(\gamma,\varepsilon_M(\mathbb{R}))=\gamma$.
(3) $T(M)=\mathrm{Hom}(\gamma,\gamma^{\perp})$.
(4) $T(M)\oplus\varepsilon_M(\mathbb{R})=\mathrm{Hom}(\gamma,\varepsilon_M(V))$.
(5) $\mathrm{Hom}(\gamma,\varepsilon_M(V))=\gamma\otimes V$.

Theorem 2. G は奇数位数の巡回群, V は原点以外で自由な G-作用を持つ 2-次元実 G-加群, γ は同変実射影平面 $M=P(\mathbb{R}\oplus V)$ 上の同変標準直線束とする. このとき $\gamma^{\oplus 4}$ は G-ベクトル束 $\varepsilon_M(\mathbb{R}^4)$ に G-同型である.

注意 任意の自然数 k に対して，$\gamma^{\oplus 2} \oplus \varepsilon_M(\mathbb{R}^k)$ は $\varepsilon_M(\mathbb{R}^{k+2})$ と (G-作用を忘れた) 実ベクトル束として同型ではない．この事実は $\gamma^{\oplus 2}$ の全 Stiefel-Whitney 類が自明でないことからわかる (詳細は [MS74] の第 4 章に記述してある)．

Theorem 3. G は奇数位数の巡回群，V は原点以外で自由な G-作用を持つ 2-次元実 G-加群とする．このとき同変実射影平面 $M = P(\mathbb{R} \oplus V)$ の接ベクトル束 $T(M)$ に対し，$T(M)^{\oplus 4} \oplus \varepsilon_M(\mathbb{R}^4)$ は $\varepsilon_M(V^{\oplus 4}) \oplus \varepsilon_M(\mathbb{R}^4)$ に G-同型である．従って，

$$4[T(M)] = 0 \quad in\ \widetilde{KO}_G(M).$$

これらの定理はすでに知られているものと思うが，球面上の G-作用（特に Smith Problem）の研究において重要であるため，この論文で具体的手法による証明を与える．

2. 同変標準直線束

この節では定理 1 の証明を与える．G は有限群，V は (有限次元) 実 G-加群，$S(V)$ は G-不変な内積 $\langle -, - \rangle$ に関する単位球面，$M = P(V)$ は同変実射影空間 $S(V)/\{\pm 1\}$，γ_M は同変標準直線束とする．点 $x \in S(V)$ に対し，$L_{[x]}$ は 2 点 $\pm x$ を通る V 内の直線を表す．$L_{[x]}^{\perp}$ をその直交補空間となるものとする．

2.1 G-ベクトル束 $\mathrm{Hom}(\gamma_M, \gamma_M)$. ベクトル束 $\xi = \mathrm{Hom}(\gamma_M, \gamma_M)$ の全空間 $E(\xi)$ は $\bigcup_{[x]\in M} \mathrm{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\gamma_M))$ である．ここで $x \in S(V)$ で，$F_{[x]}(\gamma_M)$ は γ_M の点 $[x]$ 上のファイバーを表す．ベクトル束 ξ の射影 $\pi : E(\xi) \to M$ は $f \in \mathrm{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\gamma_M))$ に対して $\pi(f) = [x]$ である．$E(\xi)$ 上の G-作用は $g \in G$, $f \in \mathrm{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\gamma_M))$ に対して $gf \in \mathrm{Hom}(F_{[gx]}(\gamma_M), F_{[gx]}(\gamma_M))$ を

$$(gf)([gx], gv) = ([gx], gf(g^{-1}(gv)) = ([gx], gf(v))$$

と定める．これらの定義を用いると ξ が G-ベクトル束であることが確かめられる．

2.2 G-ベクトル束 $\varepsilon_M(\mathbb{R}^n)$. 自然数 n に対し，ベクトル束 $\varepsilon = \varepsilon_M(\mathbb{R}^n)$ の全空間 $E(\varepsilon)$ は $\{([x], b) \mid [x] \in M,\ b \in \mathbb{R}^n\}$ である．ベクトル束 ε の射影 $\pi : E(\varepsilon) \to M$ は $\pi([x], b) = [x]$, $[x] \in M$, $b \in \mathbb{R}^n$ である．$E(\varepsilon)$ 上の G-作用は，$g \in G$, $([x], b) \in E(\varepsilon)$ に対して $g([x], b) = ([gx], b)$ で与えられる．すると，これらを用いて ε が G-ベクトル束であることが確かめられる．

2.3 同型写像 $\mathrm{Hom}(\gamma_M,\gamma_M)\to\varepsilon_M(\mathbb{R})$. 束写像 $\varphi:\mathrm{Hom}(\gamma_M,\gamma_M)\to\varepsilon_M(\mathbb{R})$ を以下のように定める．今 $f\in\mathrm{Hom}(F_{[x]}\gamma_M,F_{[x]}\gamma_M)$, $x\in S(V)$ としよう．このとき，$f(x)=tx$ となる実数 t が定まる．実際 G-不変な内積 $\langle -,-\rangle$ を用いれば，$t=\langle f(x),x\rangle$ である．そこで

$$\varphi(f)=([x],t)$$

と定義する．この $\varphi:\mathrm{Hom}(\gamma_M,\gamma_M)\to\varepsilon_M(\mathbb{R})$ は G-ベクトル束の間の同変束写像であることが確かめられる．

2.4 G-ベクトル束 $\mathrm{Hom}(\gamma_M,\varepsilon_M(\mathbb{R}^n))$. 自然数 n に対して，ベクトル束 $\eta=\mathrm{Hom}(\gamma_M,\varepsilon_M(\mathbb{R}^n))$ の全空間 $E(\eta)$ は

$$\bigcup_{[x]\in M}\mathrm{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M),F_{[x]}(\varepsilon_M(\mathbb{R}^n)))$$

である．ベクトル束 η の射影 $\pi:E(\eta)\to M$ は $\pi(f)=[x]$ である．全空間 $E(\eta)$ 上の G-作用は，$g\in G$, $f\in\mathrm{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M),F_{[x]}(\varepsilon_M(\mathbb{R}^n)))$ に対して，$gf\in\mathrm{Hom}(F_{[gx]}(\gamma_M),F_{[gx]}(\varepsilon_M(\mathbb{R}^n)))$ を $(gf)([gx],gv)=([gx],f(g^{-1}(gv))=([gx],f(v))$, $v\in F_{[x]}(\gamma_M)$ と与える．これらの定義を用いて η が G-ベクトル束であることが確かめられる．

2.5 同型写像 $\mathrm{Hom}(\gamma_M,\varepsilon_M(\mathbb{R}))\to\gamma_M$. 束写像 $\varphi:\mathrm{Hom}(\gamma_M,\varepsilon_M(\mathbb{R}))\to\gamma_M$ を，要素 $f\in\mathrm{Hom}(F_{[x]}\gamma_M,F_{[x]}\varepsilon_M(\mathbb{R}))$, $x\in S(V)$ に対して，

$$\varphi(f)=([x],(f(x))x)$$

と定義する．この定義を用いて $\varphi:\mathrm{Hom}(\gamma_M,\varepsilon_M(\mathbb{R}))\to\gamma_M$ が G-ベクトル束の間の同変束写像であることが確かめられる．

2.6 G-ベクトル束 $T(M)$.　M は実 G-加群 W に G-同変に埋め込まれているとしよう．点 $[x]\in M$ の接ベクトル空間 $T_{[x]}(M)$ は W の部分空間とみなすことができる．M の接ベクトル束 $\tau=T(M)$ の全空間 $E(\tau)$ は $\{([x],v)\mid [x]\in M,\ v\in T_{[x]}(M)\}$ である．ここで $T_{[x]}(M)$ は点 $[x]\in M$ の接ベクトル空間である．接ベクトル束 τ の射影 $\pi:E(\tau)\to M$ は $\pi([x],v)=[x]$ である．全空間 $E(\tau)$ 上の G-作用は，$g\in G$, $v\in T_{[x]}(M)$ に対して $g([x],v)=([gx],gv)$ と与えられる．ここで $v\in W$ とみなしているので $gv\in W$ である．この定義を用いて $T(M)$ が G-ベクトル束であることを確かめられる．

2.7 G-ベクトル束 $\mathrm{Hom}(\gamma_M, \gamma_M^\perp)$. ベクトル束 $\gamma' = \gamma_M^\perp$ の全空間 $E(\gamma')$ は $\{([x], v) \in M \times V \mid \langle x, v\rangle = 0\}$ であり，ベクトル束 γ' の射影は $([x], v) \mapsto [x]$ である．ベクトル束 $\xi = \mathrm{Hom}(\gamma_M, \gamma_M^\perp)$ の全空間 $E(\xi)$ は $\bigcup_{[x]\in M} \mathrm{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\gamma_M^\perp))$ である．ベクトル束 ξ の射影 $\pi : E(\xi) \to M$ は $\pi(f) = [x]$ である．全空間 $E(\xi)$ 上の G-作用は，$g \in G$, $f \in \mathrm{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\varepsilon_M(\mathbb{R})))$ に対して，$gf \in \mathrm{Hom}(F_{[gx]}(\gamma_M), F_{[gx]}(\gamma_M^\perp))$ を $(gf)([gx], gv) = ([gx], gf(g^{-1}(gv)) = ([gx], gf(v))$, $v \in F_{[x]}(\gamma_M)$ とする．これらの定義を用いて ξ が G-ベクトル束であることが確かめられる．

2.8 同型写像 $T(M) \to \mathrm{Hom}(\gamma_M, \gamma_M^\perp)$. ベクトル束 $\tau = T(M)$ と $\tau' = T(S(V))$ の全空間 $E(\tau)$,$E(\tau')$ について考える．2 点 $(x, v), (y, w) \in E(\tau')$, $(x, y \in S(V), v \in T_x(S(V))$, $w \in T_y(S(V))$ に対して，

$$(x, v) \sim (y, w) \Leftrightarrow \{x = y \text{ かつ } v = w\} \text{ また } \{x = -y \text{ かつ } v = -w\}$$

と定義すると, 自然な同一視 $E(\tau) = E(\tau')/\sim$ が得られる．つまり, $E(\tau) = \{\pm\{(x, v)\} | x \in S(V), v \in T_x S(V)\}$ とみなせる．束写像 $\varphi : T(M) \to \mathrm{Hom}(\gamma_M, \gamma_M^\perp)$ を

$$\varphi(\{\pm(x, v)\})(\alpha x) = \alpha v \ \ (\alpha \in \mathbb{R})$$

と定義する．この定義を用いて $\varphi : T(M) \to \mathrm{Hom}(\gamma_M, \gamma_M^\perp)$ が G-ベクトル束の間の同変束写像であることが確かめられる．

2.9 G-ベクトル束 $\mathrm{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(V))$. ベクトル束 $\xi' = \mathrm{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(V))$ の全空間 $E(\xi')$ は

$$\bigcup_{[x]\in M} \mathrm{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\varepsilon_M(V)))$$

である．ベクトル束 ξ' の射影 $\pi : E \to M$ は $f \in \mathrm{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\varepsilon_M(\mathbb{R})))$ に対して, $\pi(f) = [x]$ である．全空間 $E(\xi')$ 上の G-作用は，$g \in G$, $f \in \mathrm{Hom}(F_{[x]}(\gamma_M), F_{[x]}(\varepsilon_M(\mathbb{R})))$ に対して, $gf \in \mathrm{Hom}(F_{[gx]}(\gamma_M), F_{[gx]}(\varepsilon_M(V)))$ を

$$(gf)([gx], gv) = ([gx], gf(g^{-1}(gv)) = ([gx], gf(v)) \ \ (v \in L_{[x]})$$

と与える．これらの定義を用いて ξ' が G-ベクトル束であることが確かめられる．

2.10 同型写像 $T(M) \to \mathrm{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(V))$. 部分節 2.3, 2.8 より,

$$\begin{aligned} T(M) \oplus \varepsilon_M(\mathbb{R}) &\cong \mathrm{Hom}(\gamma_M, \gamma_M^{\perp}) \oplus \mathrm{Hom}(\gamma_M, \gamma_M) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\gamma_M, \gamma_M^{\perp} \oplus \gamma_M) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(V)). \end{aligned}$$

2.11 同型写像 $\mathrm{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(V)) \to \gamma_M \otimes \varepsilon_M(V)$. 束写像 $\varphi : \mathrm{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(V)) \to \gamma_M \otimes \varepsilon_M(V)$ を, 要素 $f \in \mathrm{Hom}(F_{[x]}\gamma_M, F_{[x]}\varepsilon_M(V))$ に対して,

$$\varphi(f) = ([x], v \otimes f(v))$$

と定義する. この定義を用いて $\varphi : \mathrm{Hom}(\gamma_M, \varepsilon_M(V)) \to \gamma_M \otimes \varepsilon_M(V)$ が G-ベクトル束の間の同変束写像であることが確かめられる.

3. 同変実射影平面上の同変標準直線束

この節では定理 2 の証明を行うので, その準備から始める.

G は有限群, X は G-空間とする. さらに X は閉 G-部分集合 Y と Z の和集合で, Y における $Y \cap Z$ の G-閉近傍 N が G-同相写像 $\phi : N \to (Y \cap Z) \times [0,1]$;

$$\phi(y) = (\phi_1(y), \phi_2(y)) \ \ (y \in N,\ \phi_1(y) \in Y \cap Z,\ \phi_2(y) \in [0,1]),$$

で $\phi^{-1}((Y \cap Z) \times [0,1))$ は Y の開部分集合で, また, $\phi(y) = (y, 0)$ $(y \in Y \cap Z)$ を満たすものを持つと仮定する. ここで, G は 閉空間 $[0,1]$ に自明に作用するものとする.

今, ξ は X 上の n-次元実 G-ベクトル束で, $\xi|_Y$, $\xi|_Z$ はそれぞれ G-ベクトル束 $\varepsilon_Y(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon_Z(\mathbb{R}^n)$ と同型で, $(e_1, \ldots, e_n)$ と $(f_1, \ldots, f_n)$ は $\xi|_Y$ と $\xi|_Z$ のそれぞれの標準直交 framing とする. このとき, $(e_1, \ldots, e_n)$ と $(f_1, \ldots, f_n)$ は G-同変である. すなわち, 任意の $g \in G$ に対して $e_j(gy) = ge_j(y)$, $y \in Y$, $f_j(gz) = gf_j(z)$, $z \in Z$ が成り立つ. このとき, $Y \cap Z$ から直交群 $O(n)$ への G-不変な行列関数 $A = [a_{ij}]$ が次のようにして定められる.

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}(x) e_j(x) \quad (x \in Y \cap Z, i = 1, \ldots, n).$$

Lemma 4. もし $A : Y \cap Z \to O(n)$ が単位行列への定値写像と G-ホモトピックであれば, ξ は自明 G-ベクトル束 $\varepsilon_X(\mathbb{R}^n)$ と同型である.

Proof. $B : Y \cap Z \to O(n)$ を単位行列を値とする定値写像とする. A と B が G-ホモトピックであることを用いて, $(f_1, \ldots, f_n)$ は X 上の G-同変な framing に拡張できることを示そう.

A と B が G-ホモトピックであるから, 次の条件を満たす連続写像 $H : Y \cap Z \times [0,1] \to O(n)$; $H(x,t) = (h_{ij}(x,t))$, $x \in Y \cap Z$, $t \in [0,1]$ が存在する：

$$\begin{cases} H(x,0) = A(x) \ \ (x \in Y \cap Z) \\ H(x,1) = B(x) \ \ (x \in Y \cap Z) \\ H(gx,t) = H(x,t) \ \ (x \in Y \cap Z, t \in [0,1]). \end{cases}$$

そこで N 上の framing $(k_1, \ldots, k_n)$ を

$$(k_1(x), \ldots, k_n(x)) = (e_1(x), \ldots, e_n(x))H(\phi_1(x), \phi_2(x))$$

とする. つまり

$$k_i(x) = \sum_{j=1}^{n} h_{ji}(\phi_1(x), \phi_2(x))e_j(x)$$

と定めると以下の (1)–(3) が確かめられる.

(1) $(k_1, \ldots, k_n)$ の G-同変性：

$$\begin{aligned} (k_1(gx), \ldots, k_n(gx)) &= (e_1(gx), \ldots, e_n(gx))H(\phi_1(gx), \phi_2(gx)) \\ &= (ge_1(x), \ldots, ge_n(x))H(g\phi_1(x), g\phi_2(x)) \\ &= (ge_1(x), \ldots, ge_n(x))H(\phi_1(x), \phi_2(x)) \\ &= (gk_1(x), \ldots, gk_n(x)). \end{aligned}$$

(2) $\phi_2(x) = 0$ のとき：

$$\begin{aligned} (k_1(x), \ldots, k_n(x)) &= (e_1(x), \ldots, e_n(x))H(x,0) \\ &= (e_1(x), \ldots, e_n(x))A(x) \\ &= (f_1(x), \ldots, f_n(x)). \end{aligned}$$

(3) $\phi_2(x) = 1$ のとき：

$$\begin{aligned} (k_1(x), \ldots, k_n(x)) &= (e_1(x), \ldots, e_n(x))H(\phi_1(x), 1) \\ &= (e_1(x), \ldots, e_n(x))B(\phi_1(x)) \\ &= (e_1(x), \ldots, e_n(x)). \end{aligned}$$

これより $(f_1, \ldots, f_n)$ は X 上の G-同変 framaing に拡張できることが分かる. よって G-ベクトル束 ξ と自明 G-ベクトル束 $\varepsilon_X(\mathbb{R}^n)$ は同型である. □

この節の残りでは，G は奇数位数 p の巡回群で, V は原点以外で G の作用が自由である 2 次元の実 G-加群，$W = \mathbb{R} \oplus V$, γ は実射影平面 $M = P(W)$ 上の標準直線束，$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする．G の生成元 g_0 と V の基底 $\{v_1, v_2\}$ は

$$g_0(v_1, v_2) = (v_1, v_2) \begin{pmatrix} \cos 2\pi/p & -\sin 2\pi/p \\ \sin 2\pi/p & \cos 2\pi/p \end{pmatrix}$$

を満たすものを選ぶ．従って，V を複素ベクトル空間 $\mathbb{C}$ とみなすとき

$$g_0 z = \exp(2\pi\sqrt{-1}/p)z \quad (z \in \mathbb{C})$$

である．

実射影平面 $M = P(W)$ の点 $[x]$ は

$$[x] = [\cos t, (\sin t)z]$$

と表される．ここで $z \in S^1$，$t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ である．そこで，

$$Y = \{[\cos t, (\sin t)z] \mid z \in S^1,\ 0 \leq t \leq \pi/4\},$$

$$Z = \{[\cos t, (\sin t)z] \mid z \in S^1,\ \pi/4 \leq t \leq \pi/2\}$$

とおく．Y は円板 D^2 と G-同相で，Z はメビウスの帯と G-同相である．G の S^1 への作用は $g_0 z = \exp(2\pi\sqrt{-1}/p)z$ とする．このとき

$$Y \cap Z = \left\{ \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} z \right] \;\middle|\; z \in S^1 \right\}$$

であるから，

$$\psi : Y \cap Z \to S^1$$

を

$$\psi\left(\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} z \right] \right) = z$$

と定めると，ψ は G-同相写像であることが確かめられる．ここで G-束写像 $\varphi_Y : \varepsilon_Y(\mathbb{R}^2) \to (\gamma \oplus \gamma)|_Y$ を

$$(b, r_1, r_2) \to (b, r_1 a, r_2 a)$$

で与える．ただし，$a = (\cos t, (\sin t)z)$, $0 \leq t \leq \pi/4$, $z \in S^1$，$b = [a] \in M$ である．また，G-束写像 $\varphi_Z : \varepsilon_Z(\mathbb{R}^2) \to (\gamma \oplus \gamma)|_Z$ を

$$(b, r_1, r_2) \to (b, (r_1 \cos(p\theta) - r_2 \sin(p\theta))a,\ (r_1 \sin(p\theta) + r_2 \cos(p\theta))a)$$

で与える. ただし, $a = (\cos t, (\sin t)z)$, $\pi/4 \leq t \leq \pi/2$, $z \in S^1$, $b = [a] \in M$ である. このとき, 標準 framing は

$$\begin{cases} e_1(b) = \varphi_Y(b,1,0) \\ e_2(b) = \varphi_Y(b,0,1) \end{cases} \quad \text{と} \quad \begin{cases} f_1(b) = \varphi_Z(b,1,0) \\ f_2(b) = \varphi_Z(b,0,1) \end{cases}$$

である. 明らかに $\{e_1, e_2\}$, $\{f_1, f_2\}$ は共に G-同変である. このとき, 点 $b = [a] = [\cos t, (\sin t)z] \in Y \cap Z$, $t = \pi/4$, $z = cos\theta + i\sin\theta$ に対して,

$$(f_1(b), f_2(b)) = (e_1(b), e_2(b))A_{\gamma\oplus 2}(b)$$

をみたす 2 行 2 列の行列値関数 $A_{\gamma\oplus 2} = [a_{ij}] : Y \cap Z \to O(2)$ を求めてみよう. すなわち,

$$\begin{pmatrix} \cos(p\theta)a & -\sin(p\theta)a \\ \sin(p\theta)a & \cos(p\theta)a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}(b) & a_{12}(b) \\ a_{21}(b) & a_{22}(b) \end{pmatrix}$$

をみたす $[a_{ij}(b)]$ を求める. このとき,

$$\begin{cases} a \cdot a_{11}(b) = \cos(p\theta)a \\ a \cdot a_{12}(b) = -\sin(p\theta)a \\ a \cdot a_{21}(b) = \sin(p\theta)a \\ a \cdot a_{22}(b) = \cos(p\theta)a \end{cases}$$

であるから,

$$A_{\gamma\oplus 2}(b) = \begin{pmatrix} \cos(p\theta) & -\sin(p\theta) \\ \sin(p\theta) & \cos(p\theta) \end{pmatrix} \quad (b = [a], a = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta + i\sin\theta))).$$

この形から, 任意の $b \in Y \cap Z$ に対して, $A_{\gamma\oplus 2}(b) \in SO(2)$ であるとわかる. 従って, $A_{\gamma\oplus 4} : Y \cap Z \to SO(4)$ は

$$A_{\gamma\oplus 4}(b) = \begin{pmatrix} A_{\gamma\oplus 2}(b) & 0 \\ 0 & A_{\gamma\oplus 2}(b) \end{pmatrix} (b \in Y \cap Z)$$

である.

以下において, $A_{\gamma\oplus 4}$ は定値写像と G-ホモトピックであることを示す. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} Y \cap Z & \xrightarrow{A_{\gamma\oplus 4}} & SO(4) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Y \cap Z)/G & \xrightarrow{A_{\gamma\oplus 4}/G} & SO(4)/G = SO(4) \end{array}$$

より, ホモトピー類 $[A_{\gamma\oplus 4}/G] \in [(Y \cap Z)/G, SO(4)]$ を調べることによって, G-ホモトピー類 $[A_{\gamma\oplus 4}] \in [Y \cap Z, SO(4)]^G$ を調べることができる. また $Y \cap Z$ と S^1 を写像 ψ で

同一視する：

$$\begin{tikzcd} Y \cap Z \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & S^1 \arrow[d] \\ (Y \cap Z)/G \arrow[r, "\psi/G"] & S^1/G. \end{tikzcd}$$

$(Y \cap Z)/G$ は S^1 と同相であるから, $[Y \cap Z, SO(4)]^G \cong [(Y \cap Z)/G, SO(4)] \cong \pi_1(SO(4)) \cong \mathbb{Z}/2$ である.

$$\begin{aligned} [A_{\gamma^{\oplus 4}}/G] &= \left[\begin{pmatrix} A/G & 0 \\ 0 & A/G \end{pmatrix}\right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} A/G & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A/G \end{pmatrix}\right] \\ &= 2\left[\begin{pmatrix} A/G & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right] \in [(Y \cap Z)/G, SO(4)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって, $[A_{\gamma^{\oplus 4}}] = 0$ in $[Y \cap Z, SO(4)]^G$ である. つまり, $A_{\gamma^{\oplus 4}}$ と定値写像は G-ホモトピックである. 命題 4 より, G-ベクトル束 $\gamma^{\oplus 4}$ は自明 G-ベクトル束 $\varepsilon_M(\mathbb{R}^4)$ と同型であることが従う.

次に定理 3 を証明する. 定理 1 の (4) より,

$$T(M) \oplus \varepsilon_M(\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(\gamma, \varepsilon_M(V \oplus \mathbb{R})).$$

であるから,

$$\begin{aligned} (T(M) \oplus \varepsilon_M(\mathbb{R}))^{\oplus 4} &= \mathrm{Hom}(\gamma^{\oplus 4}, \varepsilon_M(V \oplus \mathbb{R})) \\ &= \gamma^{\oplus 4} \otimes \varepsilon_M(V \oplus \mathbb{R}) \\ &= \varepsilon_M(\mathbb{R}^4) \otimes \varepsilon_M(V \oplus \mathbb{R}) \\ &= (\varepsilon_M(\mathbb{R}^4) \otimes \varepsilon_M(V)) \oplus (\varepsilon_M(\mathbb{R}^4) \otimes \varepsilon_M(\mathbb{R})) \\ &= \varepsilon_M(V^{\oplus 4}) \oplus (\varepsilon_M(\mathbb{R}^4)). \end{aligned}$$

よって, 定理 3 が示された.

References

[MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff. Characteristic Classes, Annals of Mathematics Studies, No. 76. Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974.

E-mail address: qiyan@math.okayama-u.ac.jp